

CAPITOLO III

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

1. GENERALITÀ

Siano $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n, b$ numeri reali (o complessi o elementi di un qualsiasi campo) noti.

Definizione 1.1.

Un'equazione della forma:

$$(1) \quad a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n = b$$

dicesi di *primo grado*, o brevemente *lineare*. I numeri $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$ si dicono rispettivamente *coefficienti* dell'equazione, le $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ si dicono *incognite* mentre b è detto *termine noto*.

Definizione 1.2.

Se $b = 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea*; in caso contrario si dice *non omogenea*.

Definizione 1.3.

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite è un insieme di m equazioni lineari nelle medesime n incognite, scritto nella forma:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mi}x_i + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove a_{ij} è il coefficiente dell'incognita x_j nell'equazione i -esima. Un sistema lineare può essere scritto, in modo compatto, nella forma:

$$AX = N$$

dove A è una matrice, X ed N sono colonne date da:

$$A = (a_{ij}); \quad X = (x_i); \quad N = (b_j) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Osservazione: i termini noti della colonna N hanno un solo indice, cioè quello che indica l'equazione cui essi appartengono.

Definizione 1.4.

Una *soluzione* dell'equazione (1) è una n -upla ordinata $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ che sostituita alla n -upla $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ la verifica.

Una *soluzione* del sistema (2) è una n -upla $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ che sostituita alla n -upla $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ verifica tutte le equazioni del sistema.

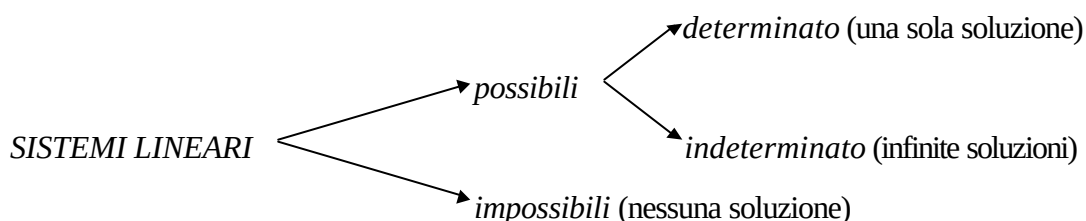
Quando un sistema ammette una o più soluzioni si dice *possibile*; in caso contrario si dice *impossibile*.

Due sistemi aventi le medesime soluzioni si dicono *equivalenti*.

Se un sistema è possibile ma ha infinite soluzioni si dice *indeterminato* altrimenti *determinato*.

Proveremo, ma lo si vuole subito evidenziare, che un sistema determinato ha sempre una ed una sola soluzione.

Vale, a tal proposito, il seguente schema:



Proviamo ora il seguente

Teorema: se un sistema $AX = N$ ha due soluzioni distinte, allora ne ha infinite.

Dimostrazione:

Siano Y e Z due soluzioni del sistema con $Y \neq Z$. Si avrà allora:

$$AY = N \quad \text{ed} \quad AZ = N$$

Costruiamo la n -upla W data da:

$$W = lY + mZ \quad \text{per} \quad l, m \in \mathfrak{R}$$

con $l + m = 1$. Si ha:

$$A(W) = A(lY + mZ) = lAY + mAZ = lN + mN = N(l + m) = N$$

Dunque W è soluzione. Poiché, inoltre, W è composto da infinite n -uple (al variare, ad esempio, di l e con $m = 1 - l$) il teorema è provato.

Il problema della risoluzione di un qualunque sistema lineare consiste, dunque, nel trovare delle condizioni a cui devono soddisfare i coefficienti ed i termini noti per sapere in quale situazione il sistema si collochi e poi, nel caso in cui tali soluzioni esistano, di impadronirsi di metodi per determinarle *tutte*.

2. RISOLUZIONE DEI SISTEMI QUADRATI DI EQUAZIONI LINEARI

Sia dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite ($i = j = 1, 2, \dots, n$):

$$(1) \quad AX = N$$

Definizione 2.1.

Si chiama *matrice incompleta* o *dei coefficienti*, associata al sistema (1), la matrice A rappresentata solo dai coefficienti a_{ij} relativi alle incognite $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, cioè:

$$A = (a_{ij}) \quad \text{per } i = j = 1, 2, \dots, n$$

Definizione 2.2.

Si chiama *matrice completa*, associata al sistema (1), la matrice B ottenuta da A aggiungendo ad essa la colonna N dei termini noti, cioè:

$$B := [AN] := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Nel caso in questione ($m = n$) vale il seguente

Teorema (di Cramer): condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (1) abbia una ed una sola soluzione è che il determinante della matrice A dei coefficienti sia diverso da zero. Soddisfatta tale condizione, l'unica soluzione del sistema è data da

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad \text{formule di Cramer}$$

dove si è posto $\Delta = \det A$ e la quantità Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la i -esima colonna con la colonna dei termini noti, per $i = 1, 2, \dots, n$.

Osservazione: il teorema di *Cramer* sopra enunciato è un teorema di *esistenza ed unicità*; ciò significa che se il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero allora il sistema o è *indeterminato* (cioè ha infinite soluzioni) oppure è *incompatibile* (cioè non ha soluzioni).

Definizione 2.3.

Il sistema (1) si dice *omogeneo* se in esso è $N = 0$, cioè sono nulli tutti i termini noti.

N.B. Si osservi che se il sistema è omogeneo con $\det A \neq 0$ allora, per il teorema di *Cramer*, l'unica soluzione del sistema è la *soluzione banale*, cioè $x_1 = \dots = x_i = \dots = x_n = 0$.

Supposto $m = n$ e $\det A \neq 0$, è noto che la matrice A ammette l'inversa (cfr. cap. II par. 4), cioè esiste A^{-1} . Moltiplicando, pertanto, a sinistra entrambi i membri dell'equazione $AX = N$ per A^{-1} si ottiene:

$$A^{-1}N = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X$$

da cui, per definizione di matrice inversa, si ha:

$$A^{-1}N = IX$$

cioè:

$$A^{-1}N = X$$

o equivalentemente, in forma non compatta:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Quindi, svolgendo il prodotto righe per colonne, si ottengono le soluzioni del sistema dato.

Tale procedimento di risolubilità, sostanzialmente equivalente all'uso delle *formule di Cramer*, di un sistema lineare di n equazioni in n incognite è conosciuto con il nome di *metodo della matrice inversa*.

Esso è particolarmente usato negli elaboratori.

ESEMPIO 1

a) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 non omogeneo:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

In primo luogo occorre verificare se è $\det A \neq 0$.

Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$$

Per il teorema di *Cramer*, quindi, l'unica soluzione del sistema è data da:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_1}{1}, \frac{\Delta_2}{1}, \frac{\Delta_3}{1} \right)$$

dove:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Dunque l'unica soluzione del sistema dato è $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

b) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 omogeneo:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Poiché $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, essendo il sistema omogeneo, l'unica soluzione è quella

banale, cioè $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

ESEMPIO 2

a) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 non omogeneo con il *metodo della matrice inversa*:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Poiché $\det A = 1 \neq 0$ esiste A^{-1} . Occorre in primo luogo calcolare l'inversa di A ; la matrice dei complementi algebrici è:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto la soluzione del sistema è data da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione del sistema dato è $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

Osservazione: si noti che il sistema era già stato risolto con il *metodo di Cramer* in **ESEMPIO 1,a** e che la soluzione ora trovata con il *metodo della matrice inversa* è ovviamente la medesima di quella ottenuta precedentemente.

b) Risolvere il seguente sistema 3×3 lineare non omogeneo con il *metodo della matrice inversa*:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$$

Poiché $\det A = 10 \neq 0$ esiste A^{-1} . Risulta:

$$A^* = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -20 & -2 \\ -32 & 20 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -20 & 20 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -20 & 20 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{17}{5} & -\frac{16}{5} \\ -1 & -2 & 2 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Pertanto si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{17}{5} & -\frac{16}{5} \\ -1 & -2 & 2 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 53 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \cdot 53 + \frac{17}{5} \cdot 2 - \frac{16}{5} \cdot 31 \\ -1 \cdot 53 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 31 \\ \frac{1}{10} \cdot 53 - \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 31 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{477}{5} + \frac{34}{5} - \frac{496}{5} \\ -57 + 62 \\ \frac{53}{10} - \frac{2}{5} + \frac{31}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione del nostro sistema è $(x, y, z) = (3, 5, 8)$.

Si risolva, per esercizio, il sistema utilizzando la *regola di Cramer* e si verifichi che la soluzione ottenuta è naturalmente identica a quella precedentemente trovata.

3. RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI QUALSIASI

Sia dato un sistema di m equazioni lineari in n incognite ($i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$):

$$(2) \quad AX = N$$

Il nostro problema è ora di trattare il caso generale cioè il caso in cui non è possibile applicare il *teorema di Cramer*. In particolare, dunque, i casi con $m \neq n$ ovvero $m = n$ e $\det A = 0$.

Per i sistemi rettangolari o quadrati non di *Cramer* esiste un teorema di carattere molto generale dovuto al francese *Rouché* e all'italiano *Capelli*¹ che ci fornisce una condizione di esistenza e non esistenza delle soluzioni. Da notare che il teorema, pur molto interessante, non ci insegna come calcolare la soluzione.

Pertanto, per tale scopo, occorrerà battere altre vie.

¹ *Rouché Eugène*, matematico francese (Sommières, Gard, 1832-Lunel, Hérault, 1910). Professore di geometria descrittiva al conservatorio d'arti e mestieri di Parigi, si occupò degli sviluppi in serie di funzioni, di problemi isoperimetrici e principalmente della teoria delle equazioni algebriche.

Capelli Alfredo, matematico italiano (Milano, 1855-Napoli, 1910). Insegnò analisi algebrica all'Università di Palermo (1881) e dal 1886 a Napoli. Socio dell'Accademia dei Lincei dal 1901, fu insigne analista; i suoi studi più notevoli riguardano la teoria delle forme e delle equazioni algebriche, nell'ambito della quale egli pervenne a risultati notevoli. Autore di un trattato di algebra ai suoi tempi famoso, nel 1894 succedette a G. Battaglini nella direzione del famoso "Giornale di Matematiche", detto anche " *di Battaglini*".

Enunciamo il seguente

Teorema (di Rouchè-Capelli): condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema $AX = N$ ammetta delle soluzioni è che la matrice incompleta e la matrice completa del sistema abbiano la medesima caratteristica (o, equivalentemente, lo stesso rango), cioè

$$r(A) = r(B)$$

Omettiamo la complessa dimostrazione.

Osservazione: il teorema di Rouchè-Capelli nel caso dei sistemi di Cramer è banalmente verificato essendo:

$$r(A) = n \quad \text{per essere } \det A \neq 0$$

$$r(B) = r(AN) = n \quad \text{avendo } AN \text{ solo } n \text{ righe}$$

E' ancora banalmente verificato nel caso dei sistemi omogenei poiché, essendo $N = 0$, risulta ovviamente:

$$r(AN) = r(A0) = r(A)$$

Dunque se la condizione del teorema è soddisfatta e se:

$$r = r(A) = r(AN)$$

occorre procedere secondo i seguenti due casi, in modo da associare al sistema dato un nuovo sistema, detto sistema *ridotto*, che può essere risolto utilizzando le *formule di Cramer*:

I° CASO: $r = n$ (soluzione unica)

II° CASO: $r < n$ (infinite soluzioni dipendenti da $n-r$ parametri)

Esaminiamo, anche con esempi, entrambi i casi.

I° $r = n$: la soluzione del sistema è unica

In questo caso si costruisce un sistema *ridotto* formato da r equazioni i cui coefficienti forniscono un minore di A di ordine r non nullo. Le soluzioni del sistema ridotto, in funzione del teorema di Rouchè-Capelli soddisfano anche le equazioni scartate.

ESEMPIO

Risolvere il seguente sistema lineare 3×2 non omogeneo:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \quad \text{con } m \neq n \quad \text{e} \quad r(A) = r(B) = n$$

Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché il minore M ottenuto considerando le prime due righe di A è tale che $\det M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ si ha $r(A) = 2$. Invece l'unico minore di ordine tre estraibile da B è B stessa e

risulta $\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Osserviamo, quindi, che $r(B) \neq 3$. Dunque si ha $r(B) = 2$ (è

sufficiente, infatti, considerare lo stesso minore del secondo ordine già estratto da A). Essendo $r(A) = r(B) = r = n = 2$, fissiamo l'attenzione sul sistema ottenuto scartando la terza equazione. Tale sistema è il sistema *ridotto* associato al minore M utilizzato prima. Il sistema ridotto:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

come è facile verificare, sfruttando le *formule di Cramer* o il classico metodo per *sostituzione*, ha come unica soluzione $(x, y) = \left(-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right)$. Tale soluzione è soluzione del sistema anche in accordo al fatto

che le equazioni scartate sono combinazioni lineari di quelle del sistema ridotto. Nel nostro caso si ha:

$$-2x + 4y + 2 = (-2)(x - 2y - 1) + 0(-2x + y - 5)$$

cioè la prima equazione è addirittura proporzionale alla terza.

II° $r < n$: il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni

In tal caso il sistema ridotto è un sistema di r equazioni in r incognite con il determinante della matrice dei coefficienti diverso da zero, che si ottiene come segue:

- si individua un minore di ordine r di B diverso da zero;
- le r righe e le r colonne di B , con cui si forma il minore del punto precedente, individuano rispettivamente r equazioni ed r incognite del sistema originario;

- delle m equazioni originarie si conservano solo le r individuate nel punto precedente e si trascurano le altre. Nelle r equazioni prese in considerazione si lasciano al primo membro tutti i termini relativi alle r incognite individuate nel punto precedente e si portano al secondo membro le restanti $n - r$ incognite;
- nel sistema delle r equazioni rimaste si assegnano valori arbitrari alle $n - r$ incognite portate al secondo membro. Si ottiene, così, un sistema di r equazioni in r incognite equivalente al sistema originario ed avente, per come è stato ottenuto, il determinante della matrice dei coefficienti diverso da zero. Tale sistema, pertanto, ha una ed una sola soluzione ottenibile con le *formule di Cramer*. Tale soluzione dipende, però, come è ovvio e come deve essere, dagli $n - r$ valori arbitrari assegnati alle incognite al secondo membro. Concludendo, il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni.

ESEMPI

1) Risolvere il seguente sistema lineare 2×3 non omogeneo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -2x + 3y - 6z = -4 \end{cases} \quad \text{con} \quad m \neq n \quad \text{e} \quad r(A) = r(B) = r < n$$

Le due matrici (incompleta e completa) associate al sistema sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \left[A \mid \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix} \right]$$

Notiamo che, se M è il minore ottenuto considerando le prime due colonne di A , si ha $\det M =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Segue allora:}$$

$r(A) = 2$ perché A contiene M ed ha due righe

$r(B) = 2$ perché B contiene A , e quindi M , ed ha due righe

Dunque $r(A) = r(B) = r = 2$. Quindi il sistema ha $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Il sistema ridotto associato è il seguente:

$$\begin{cases} x - y = 2 - 3t \\ -2x + 3y = -4 + 6t \end{cases}$$

ove si è posto $z = t$. Segue che le ∞^1 soluzioni del sistema sono:

$$x = 2 - 3t, y = 0 \text{ e naturalmente } z = t$$

Ovviamente è bene che il lettore si convinca che queste funzioni di t , sostituite nelle due equazioni del sistema di origine, le verificano entrambe.

2) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 non omogeneo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -2x + 2y + z = 5 \\ 3x - 3y + 9z = 6 \end{cases} \quad (\text{con } m = n \quad e \quad \det A = 0)$$

Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Poiché, come già osservato, l'unico minore di ordine tre di A è proprio $\det A$ che, come è facile verificare (del resto la terza riga è proporzionale alla prima), è nullo, risulta $r(A) < 3$. Inoltre, ad esempio,

$A' = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ è un minore del secondo ordine non nullo, per cui si ha $r(A) = 2$. Per

quanto riguarda il rango della matrice completa si osservi che l'ultima riga di B è proporzionale alla prima (così come era in A) per cui non esiste alcun minore di ordine tre estraibile da B diverso da zero; quindi $r(B) < 3$. Dunque risulta $r(B) = 2$ (basta considerare lo stesso minore del secondo ordine estratto precedentemente da A). Ne segue che il sistema dato ha $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Poiché tale minore, comune alle due matrici, diverso da zero, è formato dalle prime due righe conserviamo solo le prime due equazioni del sistema; poiché, inoltre, tale minore è formato dalla seconda e dalla terza colonna conserviamo al primo membro solo le incognite y e z . Quindi il sistema ridotto, posto $x = a$, è il seguente:

$$\begin{cases} -y + 3z = 2 - a \\ 2y + z = 5 + 2a \end{cases}$$

E' allora possibile risolvere il sistema utilizzando le *formule di Cramer*, cioè:

$$(y, z) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right)$$

con:

$$\Delta = A' = -7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2-a & 3 \\ 5+2a & 1 \end{vmatrix} = a + \frac{13}{7}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2-a \\ 2 & 5+2a \end{vmatrix} = \frac{9}{7}$$

Dunque le ∞^1 soluzioni sono date da:

$$(x, y, z) = \left(a, a + \frac{13}{7}, \frac{9}{7} \right)$$

Osservazione: invece del minore di ordine due considerato si poteva anche prendere in esame un altro minore, sempre del secondo ordine, diverso da zero, per esempio il minore $A'' = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -21$. Si giungeva, così, ad un nuovo sistema equivalente:

$$\begin{cases} -2x + z = 5 - 2b \\ 3x + 9z = 6 + 3b \end{cases}$$

con $y = \beta$. Si ha la soluzione:

$$(x, z) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right)$$

dove:

$$\Delta = A'' = -21; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5-2b & 1 \\ 6+3b & 9 \end{vmatrix} = \frac{13}{7} - b; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5-2b \\ 3 & 6+3b \end{vmatrix} = \frac{9}{7}$$

Dunque le ∞^1 soluzioni del sistema originario, in questo caso, sono date da:

$$(x, y, z) = \left(\frac{13}{7} - b, b, \frac{9}{7} \right)$$

Si vede subito che, posto $b = a + \frac{13}{7}$, si hanno esattamente le medesime soluzioni.

3) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 non omogeneo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad m = n \quad \text{e} \quad r(A) \neq r(B)$$

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 0$ ed un suo minore del secondo ordine è tale che $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ si vede

banalmente che $r(A) = 2$. Inoltre, se si considera la matrice completa B , si può osservare che

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0$ per cui $r(B) = 3$. Dunque, per il teorema di *Rouché-Capelli* il sistema dato

non ha soluzioni.

4. TRIANGOLAZIONE PER RIGA DEI SISTEMI

Sia S un sistema di m equazioni lineari in n incognite e sia B la matrice completa ad esso associata. Se B' è la matrice ridotta di B si può facilmente dimostrare che i sistemi S , la cui matrice completa è B , ed S' , la cui matrice completa è B' , sono *equivalenti*. Dunque, per risolvere S è sufficiente risolvere S' .

ESEMPI

1) Risolvere il seguente sistema lineare 2×2 non omogeneo dopo aver ridotto la matrice completa ad esso associata:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Si considera in primo luogo la matrice completa associata al sistema dato e si effettuano poi le *operazioni elementari* sulle sue righe, cioè:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} = B'$$

Poiché la matrice B' è ridotta, il sistema *triangolare* associato è:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -5y = 5 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue $y = -1$; sostituendo tale valore nella prima equazione si ha $x = 2$.

2) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 non omogeneo dopo aver ridotto la matrice completa ad esso associata:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = -2 \\ x + 2y - 2z = -6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Si considera, come fatto in precedenza, la matrice ridotta di B , cioè:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 4R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + 5R_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix} = B'$$

Dunque la matrice B' è ridotta per cui il sistema *triangolare* associato è:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = -2 \\ 3y - z = -6 \\ -8z = -24 \end{cases}$$

Dalla terza equazione, pertanto, si ricava $z = 3$; dalla seconda $y = -1$; dalla prima $x = 2$.

Ne segue che il sistema ha la sola soluzione: $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

3) Risolvere il seguente sistema lineare 3×3 non omogeneo dopo aver ridotto la matrice completa ad esso associata:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 3x - 2y + 4z = -3 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases}$$

Si ha:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -12 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -12 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 11R_3 - 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & -62 & 62 \end{pmatrix} = B'$$

ottenendo così il seguente sistematriangolare associato:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ -11y + z = -12 \\ -62z = 62 \end{cases}$$

Dalla terza equazione risulta che $z = -1$; sostituendo il valore di z nella seconda equazione si ottiene $y = 1$; infine sostituendo i valori di y e di z nella prima equazione si ricava $x = 1$. Dunque la soluzione del sistema originario è: $(x, y, z) = (1, 1, -1)$.

Osservazione: il criterio precedentemente illustrato per risolvere in modo *pratico* un sistema di equazioni lineari è noto con il nome di *metodo di Gauss-Jordan* oppure *metodo di riduzione* o *triangolazione a gradini*.

ESERCIZI PROPOSTI

Risolvere i seguenti sistemi lineari 1)-30), utilizzando, dove possibile, sia il metodo di Cramer sia quello della matrice inversa, dopo aver analizzato gli esempi a)-d):

$$a) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$$

Il sistema dato è quadrato per cui occorre calcolare in primo luogo il determinante della matrice dei coefficienti ad esso associata. Così facendo si verifica se sono soddisfatte le ipotesi del *teorema di Cramer*. Risulta:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

per cui il sistema si può risolvere applicando le *formule di Cramer*, cioè:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta} \right)$$

dove:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 53 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ 31 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 30; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 53 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 31 & -2 \end{vmatrix} = 50; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 53 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 31 \end{vmatrix} = 80$$

Dunque l'unica soluzione del sistema è:

$$(x, y, z) = \left(\frac{30}{10}, \frac{50}{10}, \frac{80}{10} \right) = (3, 5, 8)$$

Si calcoli la soluzione del sistema dato con il *metodo della matrice inversa* e si verifichi che la soluzione trovata è la stessa (cfr. **ESEMPIO 2, b**).

Verifica: per essere sicuri che la soluzione trovata è giusta basta sostituire in tutte le equazioni del sistema i valori di x , y e z ottenuti e verificare, quindi, che esse siano tutte soddisfatte.

La soluzione trovata è *esatta* poiché:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 53, \quad 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 - 4 \cdot 8 = 2, \quad 4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = 31$$

b) Risolvere il sistema $AX = N$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

E' un sistema lineare 4×4 del tipo

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 4y + 3t = 5 \\ 2x + 5t = 4 \\ 3z + 2t = -1 \end{cases}$$

Risulta:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$$

(basta sviluppare il determinante, per esempio, rispetto agli elementi della seconda riga)

Pertanto è possibile risolvere il sistema, per esempio, con il *metodo della matrice inversa*. Si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} -60 & -18 & -16 & 24 \\ 15 & -13 & 4 & -6 \\ -5 & 9 & 8 & -12 \\ 20 & 6 & -18 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -60 & 15 & -5 & 20 \\ -18 & -13 & 9 & 6 \\ -16 & 4 & 8 & -18 \\ 24 & -6 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = -\frac{1}{70} \begin{pmatrix} -60 & 15 & -5 & 20 \\ -18 & -13 & 9 & 6 \\ -16 & 4 & 8 & -18 \\ 24 & -6 & -12 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} \\ \frac{9}{35} & \frac{13}{70} & -\frac{9}{70} & -\frac{3}{35} \\ \frac{8}{35} & -\frac{2}{35} & -\frac{4}{35} & \frac{9}{35} \\ -\frac{12}{35} & \frac{3}{35} & \frac{6}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione del sistema si ottiene dalla relazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli segue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione cercata è:

$$(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\right)$$

Si verifichi, per esercizio, che la soluzione è esatta e si risolva il sistema con il *metodo di Cramer* confrontando le due soluzioni.

$$c) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 5x + y - 2z = 7 \end{cases}$$

Il sistema è rettangolare per cui occorre applicare il *teorema di Rouché-Capelli*. Consideriamo le due matrici associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $0 \leq r(A) \leq \min \{ 2, 3 \} = 2$ e $0 \leq r(B) \leq \min \{ 2, 4 \} = 2$.

Poiché $A' = \Delta' = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$ è un minore estratto da A non nullo, risulta $r(A) = 2$. Per quanto

riguarda la matrice completa B basta considerare lo stesso minore del secondo ordine diverso da zero; segue che è anche $r(B) = 2$.

Dunque il sistema dato ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Per determinarle si osservi che il minore non nullo considerato è stato ottenuto con i coefficienti delle incognite x ed y . Poniamo, pertanto, $z = a$ e risolviamo il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - a \\ 5x + y = 7 + 2a \end{cases}$$

la cui soluzione si può facilmente determinare con le *formule di Cramer*, con:

$$A' = \Delta' = 17; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-a & -3 \\ 7+2a & 1 \end{vmatrix} = 22+5a; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1-a \\ 5 & 7+2a \end{vmatrix} = 9+9a$$

Dunque le ∞^1 soluzioni sono:

$$(x, y, z) = \left(\frac{22+5a}{17}, \frac{9+9a}{17}, a \right)$$

Si completi l'esercizio verificando le soluzioni.

$$d) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Poiché il sistema associato $AX = N$ è quadrato bisogna calcolare il determinante della matrice dei coefficienti. Risulta:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

Il sistema non si può pertanto risolvere con le *formule di Cramer*. Occorre allora, per sapere se ci sono soluzioni, utilizzare il *teorema di Rouchè-Capelli*. Si osservi, a tal proposito, che $r(A) = 2$ essendo:

$$A' = \Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Per quanto concerne la caratteristica di B si noti che l'unico *minore orlato* di A' è proprio A . Poiché tale minore è nullo segue che $r(B) = 2$. Dunque il sistema ammette ∞^1 soluzioni calcolabili con le *formule di Cramer*, risolvendo il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 + a \\ x - 3y = 2 - 2a \end{cases}$$

Risulta, quindi:

$$A' = \Delta' = -7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3+a & 1 \\ 2-2a & -3 \end{vmatrix} = 11+a; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3+a \\ 1 & 2-2a \end{vmatrix} = 5a-1$$

Segue che la soluzione del sistema è:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{11+a}{7}, -\frac{5a-1}{7}, a \right)$$

Gli esercizi seguenti sono consigliati allo scopo di esercitarsi. Le soluzioni sono date a margine degli esercizi stessi.

$$1) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2z = 5 \end{cases} \quad [(x, y, z) = (1, 2, 3)]$$

$$2) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 5z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y + \frac{5}{2}z = 2 \end{cases} \quad \left[(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \right]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad [(x, y, z) = (2, -3, 1)]$$

$$4) \begin{cases} x + 2y - 2z = 7 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad [(x, y, z) = (3, 0, -2)]$$

$$5) \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x - y + 2z - 2t = 1 \\ 5y + 5z + 6t = 7 \\ 3x + 3z - t = 5 \end{cases} \quad \left[(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1, -\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \quad [(x, y, z, t) = (1, -2, 1, 5)]$$

$$7) \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z - t = 0 \\ x + y + z + t = -3 \end{cases} \quad [(x, y, z, t) = (-1, 1, -1, -2)]$$

$$8) \begin{cases} 2x + y + z + t = 7 \\ x + 2y + z + t = 6 \\ x + y + 2z + t = 6 \\ x + y + z + 2t = 6 \end{cases} \quad [(x, y, z, t) = (2, 1, 1, 1)]$$

$$9) \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 2z = 5 \\ 3x - 2y + 5z = 10 \end{cases} \quad \left[(x, y, z) = \left(5 - 2a, \frac{5 - a}{2}, a \right) \right]$$

$$10) \begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + y - 8z = 13 \\ 4x + y + z = 1 \end{cases} \quad [(x, y, z) = (-4 - 3a, 17 + 11a, a)]$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[(x, y, z) = \left(\frac{a+7}{7}, a, \frac{2}{7}a \right) \right]$$

$$12) \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases} \quad [incompatibile]$$

$$13) \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases} \quad \left[(x, y, z) = \left(\frac{16-8a}{7}, \frac{5a-3}{7}, a \right) \right]$$

$$14) \begin{cases} 2x + 6y + z = -3 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases} \quad \left[(x, y, z) = \left(-\frac{1+9a}{3}, a, -\frac{7}{3} \right) \right]$$

$$15) A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \left[(x, y, z) = \left(\frac{7}{5}, \frac{13}{5} + a, a \right) \right]$$

$$16) \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = \frac{1}{3} \\ 9x + 3y = 5 \end{cases} \quad \left[(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right]$$

$$17) \begin{cases} 10x - 12y = 4 \\ x - y = \frac{1}{4} \\ 3x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \quad [incompatibile]$$

$$18) \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x - y = 1 \\ 5x + z = 9 \end{cases} \quad [(x, y, z) = (2, 1, -1)]$$

$$19) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad [incompatibile]$$

$$20) \begin{cases} 2x + y - z + 3t = 2 \\ 5x + 4y - 2z + 5t = 1 \\ x + 2y - t = -3 \end{cases}$$

$$\left[(x, y, z, t) = \left(\frac{7+2a-7b}{3}, \frac{-8-a+5b}{3}, a, b \right) \right]$$

$$21) \begin{cases} x + y - 7z = 0 \\ 5x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z) = (2a, 5a, a)]$$

$$22) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z) = (2a, -a, a)]$$

$$23) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 6x + 3y - 9z = 0 \\ 5x - y - 11z = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z) = (2a, -a, a)]$$

$$24) \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \\ 7x + 14y + 13z = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z) = \left(\frac{4}{7}a, -\frac{17}{14}a, a \right)]$$

$$25) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 11 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[solo la banale]

$$26) \begin{cases} 9x + 8y - 3z = 0 \\ 5x + 6y + z = 0 \\ 9x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

[solo la banale]

$$27) \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 5x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z) = (a, 4a, -11a)]$$

$$28) \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

[solo la banale]

$$29) \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - 4y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z, t) = (a, b, -2a + 2b, -a + 2b)]$$

$$30) \begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 0 \\ x + 4y - 3z + 5t = 0 \\ x + 2y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$[(x, y, z, t) = (-a - b, a - b, a, b)]$$